Шифр: А-2

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап

по математике

2018/2019
Ленинградская область

Район Тосненский

Школа МБОУ „СОШ №3 г. Тосно"

Класс 9а

ФИО Минько Эльвира Игоревна

П2

1	2	3	4	5	Σ
7	7	0	7	X	21

№9.1

$f(x) = x^2 + bx + c \quad D > 0$

$g(x) = x^2 + b_1 x + c_1 \quad D > 0$ (по условию тк 2 корня)

По теореме Виета:

~~f~~ корни у $f(x)$ x_1 и x_2 и $g(x)$ x_3 и x_4

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 x_2 = c \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 + x_4 = -b_1 \\ x_3 x_4 = c_1 \end{cases}$$

Тк $f(1) = g(2)$ и $g(1) = f(2)$ справедливо:

$$\begin{cases} 1 + b + c = 4 + 2b_1 + c_1 \\ 1 + b_1 + c_1 = 4 + 2b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 + b + c = 4 + 2b_1 + c_1 \\ 4 + 2b + c = 1 + b_1 + c_1 \end{cases}$$

Вычтем одно уравнение из другого и получим:

$3 + b = -3 - b_1$, т.е. $\underbrace{-b_1}_{x_3 + x_4} \underbrace{- b}_{x_1 + x_2} = 6$ т.е. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$

Ответ: 6.

№9.2

Пусть все 10 рыцари. Тк кто-то из них сказал „мое число больше 1", то ~~все числа хотя бы 2~~ (все остальные утверж. только увеличив. числа) то числа меньше 2 быть не может. Тогда кто-то сказал „мое число меньше 1" и соврал тк оно хотя бы 2. Противоречие, значит все рыцарями быть не могут.

Пусть есть 1 лжец.

Рассмотрим случай, когда он говорит „мое число больше 1". Тк он лжец, то его число ≤ 1 и все остальные числа хотя бы 3 тк фразу „мое число больше 2" сказал рыцарь. Тогда фразы мое число меньше 1 и мое число меньше 2 обе неверны для любого рыцаря и тк лжец мог сказать только одну из них, то хотя бы 1 рыцарь соврал. Противоречие, такого случая быть не может.

Единственное число ≤ 1 может быть только у лжеца, какую бы фразу он не сказал тк рыцари говорят правду и их числа начинаются хотя бы с 2 (условие про большие числа). Тогда фразы „мое число меньше 1" и „меньше 2" обе неверны, т.е. сказать их может только лжец, но он говорит ровно 1 фразу ⇒ противоречие.

Пусть лжецов 2:

Пример.

(для рыцарей верно их утверждение)

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	$Л_1$	$Л_2$
2	3	4	5	6	7	8	9	9	10
больше 1	больше 2	больше 3	...	...	...	...	больше 8	больше 9 (что не верно)	больше 10 (что не верно)

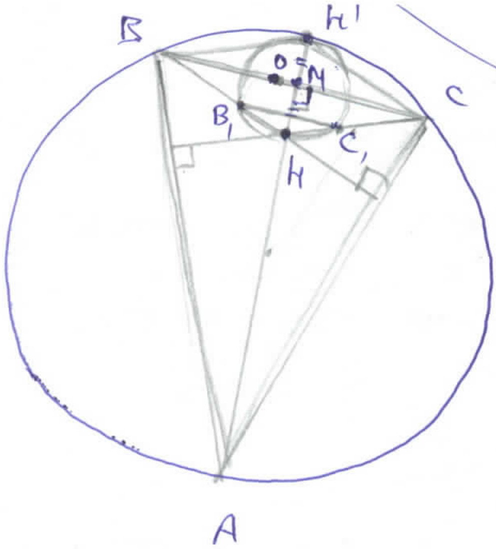
Внизу представлены числа каждого

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	$Л_1$	$Л_2$
меньше 3	меньше 4	меньше 5					меньше 10	меньше 1 (что неверно)	меньше 2 (что не верно)

Т.е. пример работает и рыцарей может быть 8.

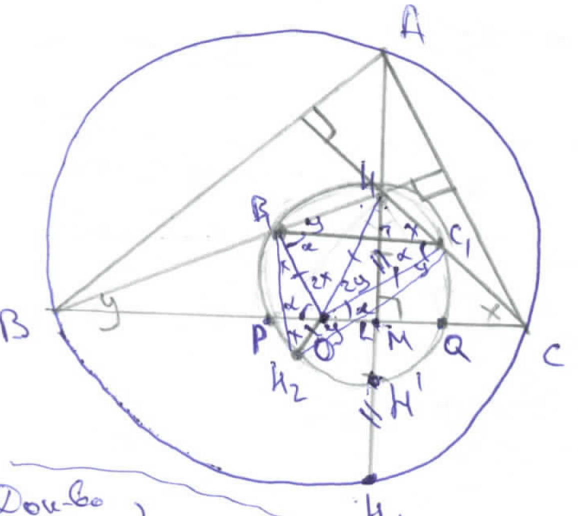
Ответ: 8 рыцарей.

№ 9.4 Н-2



~~1) Тк H - ортоцентр, то существует точка H', такая что $H'M = HM$ и H' лежит на описанной окружности~~

~~Достроим~~



№ 9.4

Решение:

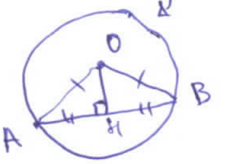
$\angle OB_1C = \angle OC_1B_1$, тк $\triangle OB_1C_1$ р/б ($B_1O = C_1O$ - радиусы)

$\angle B_1C_1O = \angle C_1OC = \angle B_1OB = \angle C_1B_1O$ (тк $B_1C_1 \parallel BC$)

O - центр маленькой окружности

$2\angle HB_1C_1 = \angle HOC_1$, $2\angle HC_1B_1 = \angle HOB_1$ | тк вписанные и централн. опир. на одну дугу.

Док-во



$AO = OB$ (радиусы) Т.е OH - высота и медиана $\Rightarrow AH = HB$

$\angle BOB_1 + \angle B_1OH + \angle HOC_1 + \angle C_1OC =$
$= 2\alpha + 2x + 2y = 180$ т.е $\alpha + x + y = 90^\circ$. Достроим диаметр HH_2.

$\angle HB_1H_2 = \angle HC_1H_2 = 90^\circ$ тк вписанные опираются на диаметр

Т.е $\angle C_1B_1H_2 = x$ и $\angle OC_1H_2 = y$, $\angle HC_1B_1 = \angle HH_2B_1 = x$ и $\angle HB_1C_1 = \angle HH_2C_1 = y$ (тк опираются на одну дугу)

Продолжим HM до пересечения с Окружн. в точке H_1 $HM = MH_1$ (по свойству ортоцентра)

PQ - диаметр окружности. O - центр и HH' хорда тк $OM \perp HH'$ то $HM = H'M$ (расстояние от центра до хорды делит её пополам). Но тогда $HM = MH_1$ и $HM = MH'$ т.е H' и H_1 совпадают и H_1 является точкой касания. ч.т.д.

№ 9.3

Рассмотрим самое большое число a_k.

$a_{k-3}\ a_{k-2}\ a_{k-1}$

a_k

a_{k-1} при делении на a_k дало остаток a_{k-1}. Те a_{k-1} один из остатков.

Пусть $a_{k-1} > a_{k-2}$

a_{k-2} при делении на a_{k-1} дало остаток a_{k-2}

Пусть $a_{k-1} < a_{k-2}$

Если остаток a_{k-1}, то в данном случае это 0, Если на a_{k-1}, то другой остаток x_1.

~~[illegible]~~

Рассмотрим самое маленькое число, ~~если его делят на a_{k-1}~~ ~~то~~ На что бы его не делили, остаток будет a_{min}.

П - 2

6	7	8	9	10	Σ
7	7	0	0	0	14

№ 9.6

$x > 100$

$x,\ x+1,\ x+2,\ x+3$

Если x - нечетное, то выберем $x,\ x+1,\ x+2$:

$x+x+1+x+2 = 3x+3 = 3(x+1)$

$x+1$ - четно те $\vdots 2$ и множитель двойку мы вынесем,

Оставшееся число не равно 2 и 3

тк $\cancel{2^2 \cdot 3 = 12 < 100}$

$\cancel{3^2 \cdot 2 = 18 < 100}$

тк $x+1 > 100$ и

$\frac{x+1}{2} > 50$

Получим $3 \cdot 2 \cdot n_1$ ($n \neq 2, n \neq 3$)

док. $\cancel{1}$

$3, 2, n_1$ - три различных натур. числа больше 1

Если x - четное, то выберем $x+1,\ x+2,\ x+3$:

$x+x+1+x+3 = 3x+6 = 3(x+2)$

$x+2$ четно те множитель двойку выносим.

Вновь оставшееся число не равно 2 и 3 тк

$\frac{x+2}{2} > 50$

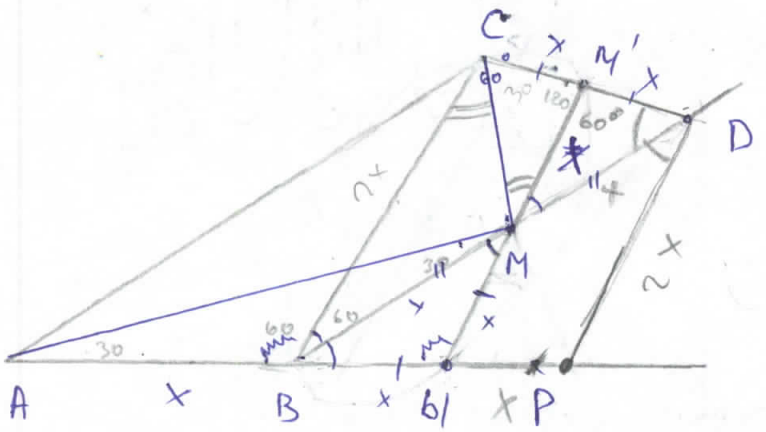
Получим $3 \cdot 2 \cdot n_2$ ($n \neq 2, n \neq 3$)

док.

$3, 2, n_2$ три различных натуральных числа больше 1

ч.т.д.

№ 98



1) $M'M \parallel CB$ тк $CM' = M'D$, средняя линия $\triangle CDB$, продолжу $M'M$ до пересечения с прямой AB

$\angle BCM = \angle MM'D = 60^\circ$ (соответств.

$\angle$ ~~CBM~~ CBM $= \angle MBЫ$ по условию

$\angle M'MD = \angle MBC$ тк соответств.

$\angle M'MD = \angle ЫMB$ тк вертикал

тк $MЫ = BЫ$ тк $\triangle MЫB$ р/б.

$\angle ABC = \angle M'ЫA$ (соответств).

~~$CM'ЫB$ – трапеция~~

~~продолжение CM~~

~~$MЫ \parallel CB$ и C~~

Проведем через D прямую DP $DP \parallel CB \parallel M'Ы$

$\angle MBP = \angle MBC = \angle BDP = \angle BDC$

(соответств.)

По тореме Фалеса $BЫ = ЫP = x$ тк $CM = M'D$, то $BЫ = ЫP$

Заметим, что $\triangle BPD$ и $\triangle BCD$ р/б (углы при основании равны) тогда Получаем, что $BP = PD$, $CD = CB$ и между собой тоже равны тк $CD = BP = 2x$, те $CDPB$ параллелограм тк все стороны равны и 2 противолежащие параллельны

2) Тогда тк $CBPD$ параллелограмм, то $CD \parallel BP$ ~~...~~ $\angle MM'C = 180 - 60^\circ = 120^\circ$, тогда $\angle MЫB = 180^\circ - 120^\circ = 60$ (тк $\angle DM'M = MЫB$ (накрест лежащие внутренние углы)

тогда $\triangle BЫM$ равносторонний, тк р/б и $\angle BЫM = 60^\circ$ тк все углы равны

$BM = MЫ = BЫ = x$

$\angle ABM = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$ и $\angle BAM = \angle BMA = 30^\circ$ тк $\triangle ABM$ равнобе ($AB = BM = x$)

3) Рассмотрим $\triangle BЫM$ и $\triangle MM'D$,

$\angle ЫBM = \angle BMЫ = \angle M'MD = \angle M'DM$ и $DM = MB$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам $\triangle M'DM = \triangle MЫB$) те $M'M = MЫ = x$

4) Рассмотрим $\triangle ABM$ и $\triangle CM'M$

$CM' = M'M = MB = BA = x$ и

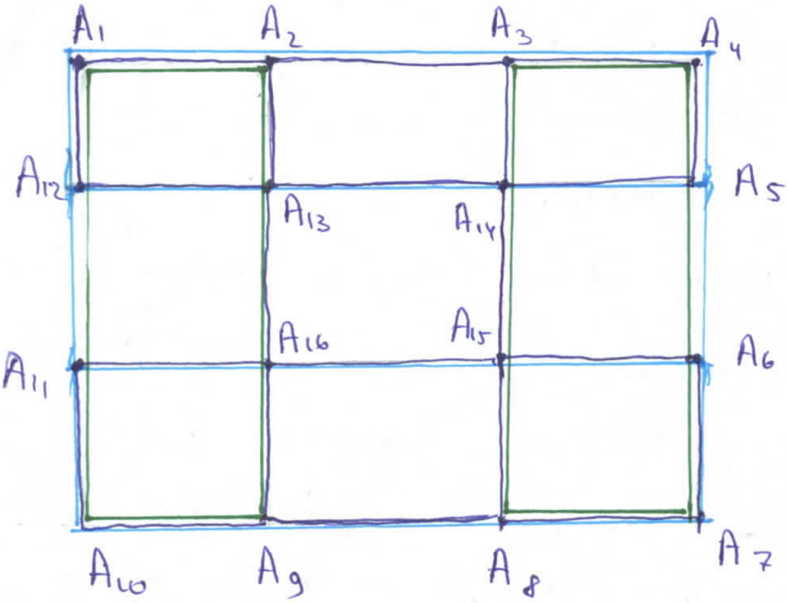
$\angle ABM = \angle MM'C = 120^\circ$

По 2 сторонам и углу между ними $\triangle ABM = \triangle CM'M \Rightarrow$

$\Rightarrow CM = AM$ и $\triangle CMA$ р/б. ч-т д.

№ 9.7 А-2

Может, если они расположены так:



Вершина A_1: □ $A_1A_2A_{13}A_{12}$, □ $A_1A_4A_5A_{12}$, □ $A_1A_2A_9A_{10}$

Вершина A_2: □ $A_1A_2A_{13}A_{12}$, □ $A_2A_3A_{14}A_{15}$, □ $A_1A_2A_9A_{10}$.

Вершина A_3: □ $A_2A_3A_{14}A_{13}$, □ $A_3A_4A_5A_{14}$, □ $A_3A_4A_7A_8$.

Вершина A_4: □ $A_3A_4A_5A_{14}$, □ $A_1A_4A_5A_{12}$, □ $A_3A_4A_7$, A_8.

Вершина A_5: □ $A_3A_4A_5A_{14}$, □ $A_1A_4A_5A_{12}$, □ $A_{12}A_5$, A_6, A_{11}.

Вершины $A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_1$ рассматриваются аналогично в силу симметрии.

A_{13}: □ $A_1A_2A_{13}A_{12}$, □ $A_2A_3A_{14}A_{13}$, □ $A_{13}A_{14}A_{15}A_{16}$
(A_{14}, A_{15}, A_{16} аналогично).

Существующие ~~четырехуга~~ прямоугольники:
$A_1A_2A_{13}A_{12}$; $A_2A_3A_{14}A_{13}$; $A_3A_4A_5A_{14}$; ~~[illegible]~~, $A_{15}A_6A_7A_8$,
$A_{16}A_{15}A_8A_9$, $A_{11}A_{16}A_9A_{10}$, $A_{13}A_{14}A_{15}A_{16}$.
$A_1A_2A_9A_{10}$; $A_3A_4A_7A_8$; $A_1A_4A_5A_{12}$, $A_{12}A_5A_6A_{11}$, $A_{11}A_6A_7A_{10}$

Каждая вершина прямоугольников является вершиной 3 прямоугольников.

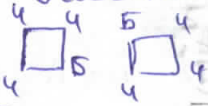
Пример работает.

Н № 4.4

Шахматная раскраска не подойдет при любом n
тк соседние мы соединять не можем тк не диагонали,
через один такой же цвет те по одну сторону диагонали
хотебы с одной стороны осталось четное кол-во
вершин, где каждого цвета поровну. Тк диагонали не
должны пересекаться и количество вершин одного цвета
уменьшается на четное число, то рано или поздно
мы придем к позиции, где 2 вершины разного
цвета будут стоять по одну сторону от диагонали
и тк шахматный порядок сохраняется, то придем
к такой ситуации: Ч Б Ч ??? , Б соединить
так, чтобы остался треугольник разноцветной диагональю
не получится те шахматная не подойдет.

Ответ: раскрасок хороших $n-1$ ÷ не подойдет так же раскраска вида:

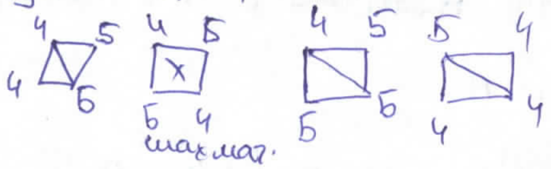
Будем считать раскраски такого вида одинаковыми



т.к. они получаются путем ~~переворота~~ поворота изначальной раскраски.

Докажем по индукции:

База $n=4$

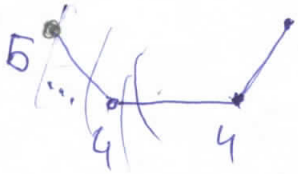


те 3 верно.

Инд. перех. $n \Rightarrow n+1$

Пусть существует многоугольник на $n+1$ вершин
тк раскраска в нем не шахматная выберем 2 Ч
идущих подряд

Если оставшийся граф на n вершинах в шахматной, то такой раскраски быть не может те этот случай невозможен

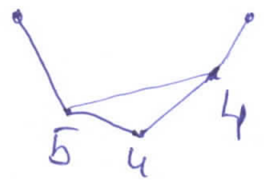


Инд. переход $n \Rightarrow n+1$.

А-2

Пусть существует многоугольник на $n+1$ вершине

Тк раскраска в нем не шахматная (такой случай не имеет смысла рассматривать), то найдем в нем первую вершину одного цвета за которой следуют 2 другого, то-



Соединив Б и 4 и забив на время про вершину между ними останется граф на n вершинах для которого существует $n-1$ хорошая расскраска.

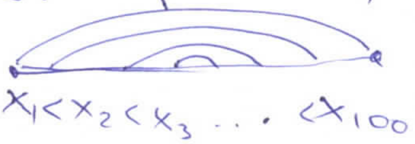
Вспомнив про оставшуюся вершину

Поймем, ~~что больше чем~~ её добавление дает ровно 1 дополнительный способ расскраски тк увеличивает кол-во вершин одного цвета ровно на 1.

Ответ: $n-1$ -количество хороших раскрасок.

№ ~~8~~-10

Какие бы числа не выписал Петя, Вася будет ставить в пары самое меньше с самыми большими. Те он сначала упорядочит их, затем будет брать так, чтоб получившееся число оказывалось наименьшим



$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geqslant ab \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

Вася будет добиваться того, чтоб разница между ab и $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ была наименьшей

~~Самое большое ab при~~

Если он найдет равенство, то получит

~~ab~~ $\frac{a^2}{a^2}$ $\frac{\frac{2}{\frac{2}{a}}}{a}$ разница в a раз.

a и $2a$

$2a^2$ $\quad \dfrac{2}{\frac{3}{2a}}$

$2a^2$ $\quad \dfrac{4a}{3}$

a^2 $\quad \frac{4}{6}a$

Разница стала больше

Те он будет стараться брать в пару числа максимально близкие к друг другу.